
SUR LA PROBABILITÉ D'ÉGALISATION DES VITESSES DES MOLÉCULES GAZEUSES

Par JEAN DE NEYMAN,

Agrégré de physique, Professeur au Lycée de Saint-Étienne.

Introduction. — L'article qui suit a été écrit avec douze autres, en prison, par un jeune physicien français fusillé par les Allemands le 2 septembre 1944, pendant les quelques jours qui ont précédé son exécution. Né à Paris le 2 août 1914, d'un père Polonais qui y résidait depuis de longues années et qui a rendu et rendu encore d'éminents services à notre pays, Jean-Casimir de Neyman était en 1938, à 24 ans, professeur agrégé au Lycée de Saint-Étienne. Mobilisé en 1939, puis destitué en 1940 sous le gouvernement de Vichy, parce que fils d'étranger, il entra comme professeur, puis directeur dans un cours privé à La Baulme et devint l'un des principaux animateurs de la résistance dans la région. Pendant l'été 1944, il resta volontairement dans la poche encore occupée de Saint-Nazaire, pour y continuer le combat. Il réussit, entre autres faits d'armes, à délivrer et à sauver dix otages à Guérande, avant de payer de sa vie son dévouement à sa patrie.

Son œuvre scientifique et pédagogique a été tragiquement interrompue aussitôt que commencée. Ce qu'il nous a laissé suffit à faire mesurer la perte subie en sa personne par l'Université française.

Sommaire. — Par une méthode ingénieuse de théorie cinétique classique, l'auteur calcule la probabilité pour que l'une des deux molécules supposées élastiques et sphériques qui se heurtent prenne, après le choc une vitesse supérieure à celle de la plus rapide avant le choc. Il donne cette probabilité en fonction du rapport c des deux vitesses $P = \frac{4c^2}{3+c^2}$.

Lorsqu'on traite de la température d'un corps gazeux, on s'appuie toujours plus ou moins implicitement sur l'hypothèse que les vitesses des molécules oscillent autour d'une sorte de moyenne (avec une amplitude du reste assez grande) qui est comme un centre d'attraction pour les vitesses trop grandes ou trop petites de quelques molécules aberrantes. Autrement dit, on suppose que par suite des chocs,

les vitesses des molécules tendent, dans une certaine mesure, à s'égaliser.

C'est de cette loi d'égalisation que je me propose de donner maintenant une démonstration.

Je suppose que deux molécules sphériques, identiques, se rencontrent avec des vitesses que je représente par v et c , c étant supposé plus petit que v . Je cherche quelle est, en fonction de c , la probabilité

pour que l'une des deux molécules rebondisse avec une vitesse supérieure à v (l'une quelconque, étant évident qu'il est impossible que les deux repartent avec une vitesse supérieure à v , vu la conservation de l'énergie).

Je vais d'abord démontrer le lemme suivant :

THÉORÈME. — *Lorsqu'une molécule A vient frapper une molécule B primitivement immobile, elles repartent toutes les deux dans des directions perpendiculaires, perçant avec une égale probabilité toute la surface d'une sphère ayant pour diamètre la vitesse initiale de A au moment du choc (les deux molécules A et B sont supposées, bien entendu, identiques, sphériques et parfaitement élastiques).*

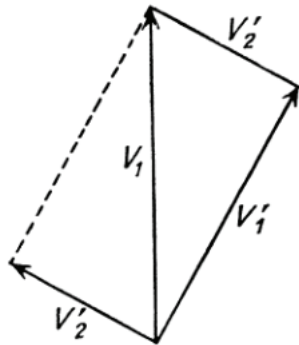


Fig. 1.

La somme des quantités de mouvement des deux molécules restant constante dans le choc, on a

$$m\vec{V}_1' + m\vec{V}_2' = m\vec{V}_1 \quad \text{si } \vec{V}_1' \text{ et } \vec{V}_2'$$

sont les vitesses finales des deux molécules et \vec{V}_1 la vitesse initiale de la première.

Donc,

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_1' + \vec{V}_2',$$

d'une part.

Comme le choc est élastique, on a aussi

$$\frac{1}{2} m \vec{V}_1^2 = \frac{1}{2} m \vec{V}_1'^2 + \frac{1}{2} m \vec{V}_2'^2 \quad \text{ou} \quad \vec{V}_1^2 = \vec{V}_1'^2 + \vec{V}_2'^2$$

et le triangle des trois vitesses est rectangle.

Il reste à chercher de quoi dépend la direction que prendra l'une ou l'autre des molécules. Le choc étant supposé sans frottement, la force exercée par A sur B pendant le temps infiniment court du contact doit passer par le centre de gravité de B, ce qui détermine la direction de la vitesse V_2' . Du reste, A ne peut passer au travers de B, ce qui l'oblige à prendre une direction faisant avec V_1' un angle au moins égal à un droit. Nous avons établi que cet angle est précisément droit. La direction de V_2'

dépend donc de la position du point K de contact des deux molécules. Soit I le point où le diamètre de B est parallèle à V_1 , M le centre de A et P celui de B. La droite IP étant donnée, le centre M de A

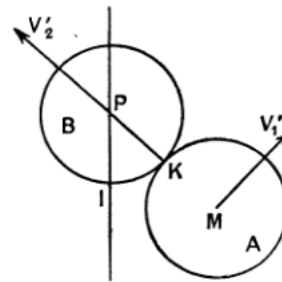


Fig. 2.

peut se trouver, au moment du choc à n'importe quelle distance de IP inférieure au diamètre, et dans n'importe quelle direction. Autrement dit, si l'on projetait M et K sur un plan perpendiculaire à IP, on trouverait des points situés au hasard dans deux cercles ayant pour axe IP et pour rayon respectivement le diamètre et le rayon d'une molécule. Donc, si x est la distance de K à IP, la probabilité que x soit compris entre deux valeurs x_0 et $x_0 + dx_0$ est égale au rapport de l'aire de la

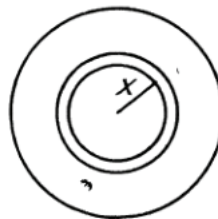


Fig. 3.

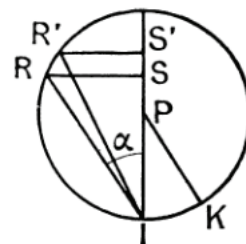


Fig. 4.

couronne de rayons x_0 et $x_0 + dx_0$, à l'aire du cercle projection de B, dont nous pouvons prendre le rayon pour unité. Cette probabilité vaut donc

$$dp = \frac{2\pi x_0 dx_0}{\pi} = 2x_0 dx_0.$$

Si α est l'angle de KP et IP, $x_0 = \cos \alpha$, donc

$$dx_0 = |\sin \alpha d\alpha| \quad \text{et} \quad dp = 2 \cos \alpha \sin \alpha d\alpha.$$

Si IR est parallèle à PK, le point R décrit sur la sphère B une petite zone lorsque la projection de K occupe toutes les positions de sa couronne. Cherchons l'aire de cette zone de méridienne RR'. IR = $2 \cos \alpha$ et IS, projection de IR sur PI, vaut

$$IS = 2 \cos^2 \alpha, \quad SS' = d(IS) = 4 \cos \alpha \sin \alpha d\alpha.$$

L'aire de la zone étant proportionnelle à sa hauteur, son rapport à l'aire de la sphère est

$$\frac{4 \cos \alpha \sin \alpha \, d\alpha}{2} = 2 \cos \alpha \sin \alpha \, d\alpha,$$

c'est-à-dire égale à dp .

On voit donc que la probabilité que R soit situé dans une zone quelconque d'axe IP est précisément proportionnelle à l'aire de cette zone, ce qui s'exprime en d'autres termes en disant que le point R se trouve situé avec une égale probabilité sur n'importe quelle région de la surface de la sphère. Si de I on mène une parallèle à V_1 , elle couperait la sphère B en un point T diamétralement opposé à R. Si R est placé au hasard, T l'est donc aussi, et le résultat est le même pour toute la sphère, pourvu qu'on mène les vecteurs à partir de l'extrémité d'un diamètre parallèle à V_1 . Notre théorème est donc démontré.

Calcul de la probabilité d'augmentation ou de diminution de vitesse d'une molécule par choc avec une autre moins rapide. — Soient \vec{OA} et \vec{OB} les vecteurs-vitesses des molécules A et B, qui valent respectivement 1 et c. Pour pouvoir

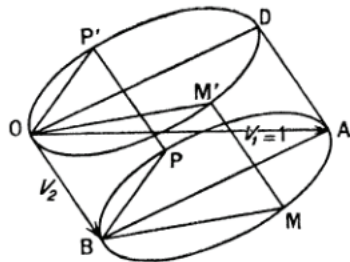


Fig. 5.

appliquer le lemme précédent, il faut que nous puissions considérer B comme immobile. Pour cela, il suffit de la repérer par rapport à des axes entraînés avec sa propre vitesse. Repérons donc toutes les vitesses, d'abord, par rapport à ces axes mobiles. La vitesse relative de A devient le vecteur OD tel que $\vec{OD} + \vec{OB} = \vec{OA}$; celle de B est nulle.

Le choc donne aux deux molécules A et B deux nouvelles vitesses relatives représentées par deux cordes rectangulaires d'un cercle de diamètre OD, soient OM' et OP'. Les vitesses absolues que nous cherchons s'obtiennent en ajoutant à chacune la vitesse relative générale \vec{OB} , ce qu'on obtient en menant $\vec{M'M}$ et $\vec{P'P}$ équipollent à \vec{OB} et \vec{DA} . Les deux nouvelles vitesses sont donc \vec{OM} et \vec{OP} . Mais

l'on a aussi

$$\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{BM} \quad \text{et} \quad \vec{OP} = \vec{OB} + \vec{BP},$$

BM et BP étant deux cordes rectangulaires du cercle de diamètre BA déduit par translation de celui qui avait pour diamètre OD. Or, d'après notre lemme, M et P sont placés au hasard sur la sphère de diamètre BA (à cela près qu'ils y restent opposés).

Les points O, B et A restant fixes, il est maintenant facile de calculer la probabilité locale pour que l'une des vitesses OM ou OP dépasse la vitesse OA supposée plus grande que OB ($OA = 1$; $OB = c$). Il suffit d'évaluer dans quel rapport la surface de la sphère de diamètre AB est partagée par la sphère de centre O et de rayon OA.

Pour aider à la clarté du calcul, refaisons la figure dans le plan OAB.

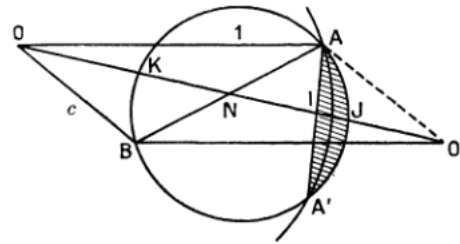


Fig. 6. — La partie hachurée est la zone de la sphère (N) extérieure à la sphère (O).

Soient N le milieu de AB et O' le symétrique de O par rapport à N. La figure OAO'B est un parallélogramme, avec

$$OA = BO' = 1, \quad OB = AO' = c \quad \text{et} \quad \widehat{AOB} = \beta$$

par définition, pour simplifier l'écriture. Les deux sphères de centre O et N, coupent le plan de la figure suivant deux cercles de mêmes centres respectifs, qui passent tous deux par A et par A', symétrique de A par rapport à ON. L'intersection des deux sphères est donc le cercle de diamètre AA' qui a pour axe ON, pour centre I, et qui se projette sur la figure suivant AIA'. D'autre part, la sphère [N] coupant la ligne des centres en J et K, la zone (1) de cette sphère extérieure à la sphère [O] a pour hauteur IJ, et le rapport de son aire à l'aire de la sphère complète est $\frac{IJ}{KJ}$. C'est ce rapport qui mesure la probabilité locale (c'est-à-dire relative à la seule figure AOB) que l'une déterminée des deux molécules reparte avec une vitesse supérieure à 1. La probabilité locale que nous cherchons d'abord est double,

(1) Cette zone pourrait plus précisément être appelée calotte, mais elle se traite, au point de vue des calculs, comme une zone.

puisque chaque molécule a la même probabilité et que les deux cas s'excluent. Nous avons donc

$$p = \frac{2IJ}{KJ} = 2 \frac{NJ - NI}{AB} = \frac{AB - 2NI}{AB} = 1 - 2 \frac{NI}{AB}.$$

Calculons donc $\frac{NI}{AB}$ en fonction de c et β

$$NI = OI - ON,$$

OI est la projection de OA sur OO' dans le triangle OAO' dont l'angle en A est supplémentaire de β

$$\overline{AO'}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OO'}^2 - 2 \overline{OI} \cdot \overline{OO'},$$

donc

$$OI = \frac{\overline{OA}^2 + \overline{OO'}^2 - \overline{AO'}^2}{2 \overline{OO'}} = \frac{1 + \overline{OO'}^2 - c^2}{2 \overline{OO'}}.$$

Or

$$\overline{OO'}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AO'}^2 + 2 OA \cdot AO' \cos \beta = 1 + c^2 + 2c \cos \beta.$$

D'où

$$OI = \frac{2 + 2c \cos \beta}{2 \sqrt{1 + c^2 + 2c \cos \beta}} = \frac{1 + c \cos \beta}{\sqrt{1 + c^2 + 2c \cos \beta}},$$

ON est la moitié de OO', donc

$$ON = \frac{1}{2} \sqrt{1 + c^2 + 2c \cos \beta} = \frac{1}{2} \frac{(1 + c^2 + 2c \cos \beta)}{\sqrt{1 + c^2 + 2c \cos \beta}}.$$

NI = OI - ON

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + c^2 + 2c \cos \beta}} \left(1 + c \cos \beta - \frac{1}{2} - \frac{c^2}{2} - c \cos \beta \right) = \frac{1 - c^2}{2 \sqrt{1 + c^2 + 2c \cos \beta}}.$$

D'autre part,

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2 OA \cdot OB \cos \beta = 1 + c^2 - 2c \cos \beta,$$

$$AB = \sqrt{1 + c^2 - 2c \cos \beta}$$

et

$$p = 1 - 2 \frac{NI}{AB} = 1 - \frac{1 - c^2}{\sqrt{(1 + c^2 + 2c \cos \beta)(1 + c^2 - 2c \cos \beta)}}$$

donc

$$p = 1 - \frac{1 - c^2}{\sqrt{(1 + c^2)^2 - 4c^2 \cos^2 \beta}}.$$

Cette expression de p n'est guère utile, car nos calculs dépendront ensuite plus simplement de AB et de NI.

Elle ne donne encore que la probabilité locale, correspondant à la seule valeur de β utilisée dans la formule obtenue. Il reste à calculer la probabilité totale P en tenant compte pour chaque valeur de β de la probabilité de cette valeur, probabilité qui n'est pas uniforme comme nous allons le montrer.

En effet, si nous portons à partir de O tous les vecteurs OB possibles, les extrémités B se répartissent sur une sphère S d'une façon qui serait homogène si pour toutes les valeurs de β deux molécules de vitesse v et c avaient les mêmes chances de se rencontrer. Or, une molécule qui se déplace a d'autant plus de chances de rencontrer une molécule fixe que sa vitesse est plus grande. La probabilité de rencontre des molécules A et B est donc *proportionnelle à leur vitesse relative*, représentée par la longueur AB. Il convient donc d'affecter chaque

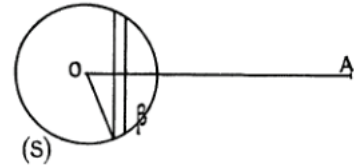


Fig. 7.

région de la sphère S d'un coefficient de probabilité proportionnel à AB. Il suffit du reste de le faire pour chaque zone de S ayant OA comme axe, à condition que sa hauteur soit infiniment petite, soit dh . Comme dh est proportionnel à la variation de $\cos \beta$, l'aire de la zone est proportionnelle à $\sin \beta d\beta$ et la probabilité que le point B s'y trouve est proportionnelle à $AB \sin \beta d\beta$. On peut donc écrire la valeur de la probabilité totale P sous la forme

$$P = \frac{\int_0^\pi p AB d\beta \sin \beta}{\int_0^\pi AB d\beta \sin \beta} = \frac{\int_{-1}^{+1} p AB dt}{\int_{-1}^{+1} AB dt}$$

si l'on pose $\cos \beta = t$ (en changeant les signes haut et bas).

Comme nous avons

$$p = 1 - \frac{2NI}{AB} = \frac{AB - 2NI}{AB},$$

$$P = \frac{\int_{-1}^{+1} (AB - 2NI) dt}{\int_{-1}^{+1} AB dt} = \frac{\int_{-1}^{+1} AB dt - \int_{-1}^{+1} 2NI dt}{\int_{-1}^{+1} AB dt} + 1$$

avec

$$2NI = \frac{1 - c^2}{\sqrt{1 + c^2 + 2ct}}, \quad AB = \sqrt{1 + c^2 - 2ct}.$$

En calculant séparément les deux intégrales, on obtient d'une part

$$\int 2NI dt = \int \frac{(1 - c^2) dt}{(1 + c^2 + 2ct)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2(1 - c^2)}{\sqrt{2c}} \left(\frac{1 + c^2}{2c} + t \right)^{\frac{1}{2}}$$

de sorte que

$$\int_{-1}^{+1} 2NI dt = \frac{2(1-c^2)}{\sqrt{2c}} \left(\frac{1+c}{\sqrt{2c}} - \frac{1-c}{\sqrt{2c}} \right) = 2 - 2c^2,$$

d'autre part,

$$\int \Lambda B dt = \int \sqrt{1+c^2-2ct} dt = -\frac{2}{3}\sqrt{2c} \left(\frac{1+c^2}{2c} - t \right)^{\frac{3}{2}}$$

et

$$\int_{-1}^{+1} \Lambda B dt = \frac{2}{3}\sqrt{2c} \left[\frac{(1+c)^3}{2c\sqrt{2c}} - \frac{(1-c)^3}{2c\sqrt{2c}} \right] = 2 + \frac{2}{3}c^2.$$

On a donc finalement

$$P = \frac{4c^2}{3+c^2}.$$

Cette formule, d'une étonnante simplicité, donne une explication complète des conditions d'échange de vitesse par chocs : on peut le rendre tout à fait générale en remplaçant c par $\frac{V_2}{V_1}$, puisque c était la vitesse V_2 en prenant V_1 comme unité. On a alors la formule applicable dans tous les cas

$$P = \frac{4V_2^2}{3V_1^2 + V_2^2},$$

P étant la probabilité qu'après le choc une des molécules ait une vitesse dépassant la vitesse V_1 , supposée elle-même plus grande que V_2 , V_1 et V_2 étant les vitesses des molécules avant le choc.

Représentation graphique des variations de la probabilité P avec le rapport c des vitesses (fig. 8). — Le diagramme débute avec une allure parabolique, et devient ensuite presque rectiligne, pour atteindre $P = 1$ avec la valeur $c = 1$, ce qui est évident *a priori*.

On voit clairement les faibles valeurs de la probabilité P pour les petites valeurs de c , c'est-à-dire lorsqu'il existe une grande différence entre les deux vitesses V_1 et V_2 ; par exemple, il y a environ

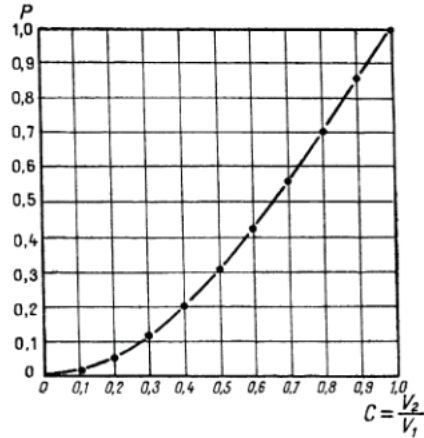


Fig. 8.

neuf chances sur dix que les vitesses s'égalisent si l'une est au début triple ou quadruple de l'autre. Lorsque l'une est double de l'autre, il n'y a plus que sept chances sur dix pour qu'elles s'égalisent. Enfin, pour $c = 0,66$ environ, c'est-à-dire lorsque l'une des vitesses est de 50 pour 100 supérieure à l'autre, elles ont autant de chances de s'égaliser que d'augmenter leur différence.

On peut donc dire en quelque sorte que l'inégalité moyenne que tendent à produire les chocs entre molécules correspond au rapport des vitesses de 2 à 3, puisque les vitesses tendent à s'égaliser par le choc, ou à se différencier davantage, suivant que leur rapport est plus petit ou plus grand que deux tiers.