I - REMARQUES ARITHMETIQUES

Le calcul rapide, mental ou écrit, peut être souvent simplifié, si l'on tient compte de certaines remarques, les unes d'ordre mathématiques, les autres en liaisons avec le calcul des erreurs.

a) MODIFICATIONS PUREMENT MATHEMATIQUES.

Elles proviennent presque toujours de l'emploi de l'identité $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ et reviennent donc à substituer à une multiplication la soustraction de deux carrés, à condition de pouvoir facilement remplacer les deux nombres x et y à multiplier par a + b et a - b, c'est à dire, pour la suite du calcul, à condition de pouvoir trouver facilement la demi somme a et la demi différence b des deux nombres x et y.

Par exemple sont à multiplier 32 x 48 c'est à dire

$x = 48$ ou $a = 40$
$y = 32$ $\quad b = 8$

On pense immédiatement $(40 - 8)(40 + 8) = 40^2 - 8^2 =$
$= 1600 - 64 =$
$= 1536$

De même $15,75 \times 14,25 = (15 + 0,75)(15 - 0,75) = 15^2 - 0,75^2 =$
$= 225 - 0,5625 = 224,4375$

Cette méthode donne donc des résultats immédiats dans les cas où l'on peut instantanément obtenir non seulement a et b mais encore leurs carrés a^2 et b^2. D'où l'intérêt pratique de toutes les méthodes qui permettent le calcul ou l'obtention directe des carrés, parmi lesquelles je vais indiquer mes préférés.

α) Carrés des nombres terminés par 5 (méthode théoriquement classique, et le plus souvent ignorée même des professeurs de mathématiques ou de physique - Je la rappelle donc pour lui faire un peu de publicité).

Sur un nombre de 2 chiffres, terminé par 5, qui s'écrit donc Z 5 et signifie 10 z + 5 (si le nombre a 3 chiffres, Z représente le nombre formé par les deux premiers, et tout ce qui suit reste valable).

....

Son carré est donc, $(10z + 5)^2 = 100z^2 + 100z + 25 = [z(z + 1)] \times (100) + 25$

Ce carré peut donc être considéré comme formé par Z fois (z + 1) sentaines, le tout augmente de 25, ce qui, dans la pratique, donne des résultats instantanés, tant oraux, qu'écrits. Par exemple : $25^2 = (2 \times 3)$ cents $+ 25 = 625$

$$75^2 = (7 \times 8) \text{ cents} + 25 = 5625$$
$$105^2 = (10 \times 11) \text{ cents} + 25 = 11025$$
$$155^2 = (15 \times 16) \text{ cents} + 25 = 24025$$

Dès qu'on a fait quelques exefcices là-dessus, on peut tout aussi bien écrire ou prononcer *directement*

$$25^2 = 6.25$$
$$75^2 = 5625$$

et à fortiori $10{,}5^2 = 110{,}25$ *par exemple*

β)- CARRES DES NOMBRES ENTIERS COMPRIS ENTRE 25 ET 75 (méthode inventée)par moi-même)

Cette méthode est aussi basée sur une simple identité algébrique, et par conséquent aura même des applications plus étendues que celles annoncées.

Sert en effet à prendre le carré du nombre x

Posons $y = x - 50$ *on a* $x = 50 + y$

$$x^2 = 2500 + 100y + y^2 = (25 + y)100 + y^2$$

Compte de la définition de y $x^2 \equiv (x-25)100 + (x-50)^2$

*identité qu'*il est du reste facile de vérifier directement - Nous pouvons donc traduire, en langage arithmétique : le carré d'un nombre entier x est un nombre entier que l'on peut former en prenant comme nombre de centaines l'excédent de x sur 25 et comme nombre d'unités le carré de la différence entre x et 50 (sans s'inquiéter du signe de cette différence).

Par exemple, soit à chercher le carré de 46. *Comme* $46 - 25 = 21$ *et* $50 - 46 = 4$ *on a*

$$46^2 = 21 \times 100 + 4^2 = 2116$$

De même pour chercher le carré de 57, on pense $57 = 25 + 32$ *et* $57 = 50 + 7$ *donc* $57^2 = 32 \times 100 + 7^2 = 3249$

Et l'on ~~obtient~~ voit tout de suite que l'écriture de ces deux nombres 2116 et 3249 s'obtient par la simple juxtaposition des nombres 21 et 16 d'une part , ou 32 et 49, d'autre part, qui ont servi au calcul.

Dans quels cas ce calcul est-in intéressant ? Evidemment dans tous ceux où il permet d'obtenir rapidement, en fait, le résultat cherché. Or, la différence $x - 25$ est toujours facile à prendre, lorsque x est un nombre entier; la seconde différence $x - 50$ doit être élevée au carré, et c'est donc d'elle que dépendra le degré de simplicité du calcul, mais l'on voit que si l'on connait par coeur tous les carrés de nombres entiers jusqu'à 25, x peut osciller entre 25 et 75 et de ce fait même on pourra immédiatement trouver tous les carrés de 1 à 75, c'est à dire que le petit effort de mémoire que l'on doit faire une bonne fois est immédiatement multiplié par 3.

C'est ainsi que si l'on sait que $17^2 = 289$ on en déduit immédiatement que $33^2 = 800 + 289 = 1089$
et que $67 = 4200 + 289 = 4489$
De même puisque $23^2 = 529$ on a
$27^2 = 200 + 529 = 729$
et $73^2 = 4800 + 529 = 5329$

D'où la conclusion pratique concernant l"intérêt, pour ne pas dire la nécessité (en ce qui concerne au moins les étudiants en sciences) de connaitre par coeur non seulement les carrés jusqu'à 12, mais bien jusqu'à 25.

Je rappelle à ce sujet que tout carré d'un nombre entier se déduit du précédent ou du suivant avec la plus grande simplicité, puisque la différence de deux carrés de nombres entiers successifs est égale à la somme de ces nombres entiers, en vzetu de la même identité : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ ici

$$(n+1)^2 - n^2 = 1\,(\overline{n+1} + n)$$

Par exemple : $15^2 = 225$ (carrés terminés par 5)
$16^2 = (15+16) + 225 = 256$
$17^2 = (16+17) + 256 = 289$

Ce qui n'empêche qu'à mon avis, il faut, sans avoir besoin de chercher le moins du monde, savoir par coeur tous les carrés entiers jusqu'à 25^2, et j'ajoute que mon expérience personnelle montre qu'on peut parfaitement obtenir des élèves qu'ils fassent cet effort. (voir page 3 bis)

γ) Carrés des nombres, même compliqués, voisins de 50

Ce n'est qu'une nouvelle application de la même formule appliquée au paragaphe B, à savoir :

$$x^2 \equiv (x-25)100 + (x-50)^2$$

formule de pure identité donc toujours applicable en théorie.

Par ailleurs, une règle mnémotechnique simple permet de retenir dans la mémoire les carrés des nombres entiers compris entre 15 et 25 :

En effet, si l'on pose : $n = 20 + x$,

on a : $n^2 = (20 + x)^2 = 400 + 40\,x + x^2 =$

$$4\,(10 + x)\,.\,10 + x^2 = 4\,(n - 10)\,.\,10 + (n - 20)^2$$

Cette identité, juste pour toutes les valeurs de x, est plus particulièrement intéressante pour les valeurs de x, entières, comprises entre <u>− 5</u> et <u>+ 5</u>. Par exemple :

$n = 17 \quad x = -3 \quad n^2 = 7\,.\,4$ diz. $+ (-3) = 289$

$n = 19 \quad x = -1 \quad n^2 = 9\,.\,4$ diz. $+ (-1) = 361$

$n = 22 \quad x = +2 \quad n^2 = 12\,.\,4$ diz $+ (+2) = 484$

$n = 24 \quad x = +4 \quad n^2 = 14\,.\,4$ diz $+ (+4) = 576$

D'où la règle : Le carré des nombres entiers compris entre 15 et 25 s'obtient en formant les dizaines par le produit par 4 du nombre diminué de 10 et en y ajoutant le carré de la différence entre le nombre considéré et 20 .

Or en pratique, si le nombre x n'est pas éloigné de 50 (en déplaçant la virgule le cas échéant), le carré de x-50 peut être facile à trouver même si x a une apparence relativement compliquée. C'est ainsi qu'on peut trouver les carrés exacts des nombres compris entre 42,5 et 57,5 lorsqu'ils sont donnés avec une décimale suivant la virgule.

Par exemple pour trouver $48,1^2$ on pense que $48,1 = 25 + 23,1$ et que $50 - 48,1 = 1,9$ dont le carré est $3,61$

d'où $48,1^2 = 23,1 \times 100 + 3,61 = 2313,61$

Ce qui s'écrit au courant de la plume par l'alignement des nombres 231 et 3,61.

(L'application est plus pénible lorsque la différence avec 50 dépasse 2,5 car on est obligé de la faire en deux temps, et je ne les recommande plus alors qu'à titre de vérification.

Par exemple $56,8 = 25 + 31,8 = 50 + 6,8$

$56,8^2 = 3180 + 6,8^2 = 3180 + 43 + 3,24 = 3226,24$

ce qui oblige en passant à trouver $6,8^2 = 43 + 3,24$

Par contre, si le nombre est très voisin de 50, on peut s'offrir le luxe de trouver instantanément son carré, même lorsqu'il a 2 chiffres décimaux. Par exemple, puisque 49,87 = 25 + 24,87 et que 50 - ~~49,87~~ = 0,13 dont le carré est 0,0169 on a immédiatement

49,87

$$49,87^2 = 2487,0169$$

et cet alignement automatique de 8 chiffres significatifs d'un nombre me semble pour le moins amusant.

b) - SIMPLIFICATION DES CALCULS SUIVANT LE PROCEDE DES CALCULS D'ERREURS.

Cette fois, il s'agit d'obtenir le résultat d'un calcul en physicien, et non plus en mathématicien, cela signifie que le résultat cherché l'est avec un nombre déterminé, mais limité, de chiffres significatifs, et que les suivants n'ayant aucun sens, il est absolument indifférent de les trouver exactement ou non au point de vue arithmétique.

Soit, par exemple, à chercher quel est le volume d'une plaque rectangulaire de 51 c/m,3 x 98 c/m,6 x 1 c/m,012 - En faisant les deux multiplications on trouve, sauf erreur de calcul (et je dois avouer que j'en ai déjà corriger une sur mon brouillon) 5118 c/m³, 87816 . Mais comme chacun doit le savoir, ce résultat ainsi présenté, est aussi ridicule que prétentieusement exact. En supposant chacun des chiffres significatifs des 3 dimensions exacts, la 1ère est connue à 1/1000 près, la seconde à 1/2000 et la 3ème à 1/2000 près aussi, environ, de sorte que le volume ne peut être calculé qu'à 2/1000 près, au mieux, c'est à dire, qu'il y a un doute sur sa valeur d'environ 10 c/m ^{3} autour de la valeur possible de 5118 c/m ^{3}. Il est bien clair qu'en pareil cas, la connaissance des 5 chiffres soi-disant significatif qui suivent la virgule est plus qu'illusoire : elle ne peut conduire qu'à une fausse interprétation de la réalité connue.

Il s'agit donc en réalité de calculer à quelques centimètres ~~autres~~ cubes près, aussi rapidement que possible, le résultat "exact" 5118 c/m ^{3}

La méthode que je propose est celle-ci : on fait un premier calcul avec des nombre ronds, les plus voisins possible des nombres désirés ; puis on rectifie le résultat en tenant compte des erreurs de départ faites volontairement. Par exemple ici, l'on fait le calcul en prenant les premiers nombres suivants : 50 c/m x 100 c/m x 1 c/m, ce qui donne immédiatement 5000 c/m ^{3}, résultat inexact encore, mais qui à déjà l'avantage d'être un ordre de grandeur exact. Puis l'on dit : il faut rectifier ce résultat en majorant la 1ère dimension de 26/1000, en diminuant la seconde de 14/1000 et en augmentant la dernière de 12/1000 - Au total il faut donc augmenter le résultat (le volume trouvé) de 24/1000, soit de 120 c/m ^{3}. Le volume est donc de 5120 c/m en réalité. Les deux résultats 5118 et 5120 c/m ^{3} sont <u>également corrects</u>, puisque le volume n'a de sens qu'à 10 c/m 3 près, et le second a eu les deux avantages d'être trouvé presque instantanément, et sans erreur possible d'ordre de grandeur, ce qui est capital en physique.

La présente méthode est d'un emploi général, dans la plupart des opérations exécutées en application de formules de physique. En effet, l'inconnue se présente généralement sous la forme

$$x = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}$$

α, β et γ étant des exposants soit entiers (et souvent égaux à un) positifs, soit négatifs, soit fractionnaires (cas de racines).

Or on sait que dans tous les cas, à condition que l'erreur relative sur chacun des nombres a, b et c reste petite on a, suivant les notations habituelles (Δx = erreur absolue sur x, $\frac{\Delta x}{x}$ = erreur relative sur x etc...)

$$\frac{\Delta x}{x} \# \alpha \frac{\Delta a}{a} + \beta \frac{\Delta b}{b} + \gamma \frac{\Delta c}{c}$$ (le signe # signifie : sensiblement égal à)

De sorte que les modifications à apporter à x se calculent avec une extrême aisance si l'on connait celles à apporter à a, b, c,.

Par exemple, cherchons quelle est, en un lieu où g = 981 c.g.s. la période d'un pendule simple de 99 c/m,0, pour des oscillations de faible amplitude, c'est à dire en application de la formule

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} l &= 99{,}0 \\ g &= 981 \\ \pi &= 3{,}14159\ldots \end{aligned}$$

Profitons, pour faire le calcul, de ce que $\pi^2 \# 9{,}87$ ce qui nous permettra l'introduction de nombres ronds voisins des nombres exacts

On a $T = 2\sqrt{\frac{\pi^2 l}{g}} = 2\left[\pi^2 l g^{-1}\right]^{1/2} = 2\,(\pi^2)^{1/2} . \, l^{1/2} . \, g^{-1/2}$

En remplaçant π^2 par 10, l par 100 et g par 1000, nous avons une première valeur approchée $T' = 2\left[10 \times 100 \times 1000^{-1}\right]^{1/2} = 2$ secondes

Il ne reste plus qu'à rectifier : $\frac{\Delta\pi^2}{\pi^2} = \frac{-13}{1000}$ $\frac{\Delta l}{l} = \frac{-10}{1000}$ $\frac{\Delta g}{g} = \frac{-19}{1000}$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\frac{\Delta\pi^2}{\pi^2} + \frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g} = \frac{-6{,}5}{1000} + \frac{-5}{1000} - \frac{-9{,}5}{1000} = \frac{-2}{1000}$$

d'où $\Delta T = -0{,}004$ et $T = 1{,}996$

Quelle est la valeur de ce résultat ? deux données étaient connues, au mieux à 1/2000 près, donc $\frac{l}{g}$ peut être calculé au 1/1000 et $\sqrt{\frac{l}{g}}$ à 1/2000, ce qui doit permettre (et obliger) de claculer T à $0^s{,}001$ près.

Or en faisant le calcul "rigoureux", je trouve après un bon quart d'heures d'efforts et de vérifications pénibles (une division avec 8 chiffres significatifs, une extraction de racine avec 7 chiffres, une multiplication de 2 nombres de 7 chiffres) $T = 1^s{,}996014$, ce qui me donne une nouvelle preuve de l'excellence de la méhtode "par approximation et rectifications ulétérieures" que je propose.

Quelles sont les limites du domaine d'application de cette méthode ? Nous utilisons une formule approchée, celle qui donne la valeur de l'erreur relative sur x, dans l'hypothèse de la relation $x = a^\alpha b^\beta c^\gamma$ - Or cette formule approchée vient du calcul suivant (ou d'un calcul équivalent) qui nous permettra de nous rendre aisément compte de son degré d'approximation.

Soient Δx, Δa, Δb et Δc les variations (ou erreurs) concernant les quantités x, a, b, et c,

Nous avons $x = a^\alpha b^\beta c^\gamma$

$$x + \Delta x = (a + \Delta a)^\alpha (b + \Delta b)^\beta (c + \Delta c)^\gamma$$

~~Nous avons : x = a b c~~

ou ce qui revient au même, en prenant les logarithmes neperiens

$$\mathrm{Log}\ x = \alpha \,\mathrm{Log}\ a + \beta \,\mathrm{Log}\ b + \gamma \,\mathrm{Log}\ c$$

$$\mathrm{Log}(x + \Delta x) = \alpha \,\mathrm{Log}(a + \Delta a) + \beta \,\mathrm{Log}(b + \Delta b) + \gamma \,\mathrm{Log}(c + \Delta c)$$

soit, par différence, et en tenant compte de ce que $\mathrm{Log}\, y - \mathrm{Log}\, z = \mathrm{Log}\, \frac{y}{z}$

$$\mathrm{Log}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \alpha \,\mathrm{Log}\left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) + \beta \,\mathrm{Log}\left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right) + \gamma \,\mathrm{Log}\left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right)$$

Jusqu'ici la formule est rigoureuse. Mais, pour faire disparaitre les logarithmes, nous développons en série suivant la formule

$$\mathrm{Log}(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^3 - \frac{1}{4}\varepsilon^4 + \cdots$$

Il vient donc :

$$\frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 + \cdots = \alpha\left[\frac{\Delta a}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^3 + \cdots\right] + \beta\left[\frac{\Delta b}{b} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^3 + \cdots\right] +$$
$$+ \gamma\left[\frac{\Delta c}{c} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta c}{c}\right)^3 + \cdots\right]$$

La formule approchée est simple provient tout simplement de la négligence de tous les termes qui sont des puissances des erreus relatives $\frac{\Delta x}{x}$, $\frac{\Delta a}{a}$ etc... de degré supérieur à 1. Comme ces termes sont, en vérité, très petits, les principaux termes négligés sont, dans le 1er nombre de l'égalité comme dans le second ceux du second degré, soit à gauche :

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2$$

et à droite

$$-\frac{1}{2}\left[\alpha\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \beta\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \gamma\left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2\right]$$

Les erreurs ainsi commises, par négligence simplificative se compensent au moins partiellement si α, β et γ sont positifs, et au contraire, ont leur maximum de virulence si α, β et γ sont négatifs. De toutes façons, elles ne dépassent pas l'ordre de grandeur de deux fois $\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2$ soit de $\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2$, ou pour être plus prudent, de la valeur qu'aurait $\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2$ si les signes de α, β et γ étaient tous les mêmes, valeur que nous appellerons pour abréger le carré de l'erreur relative "empirée".

Nous pouvons donc énoncer la régle pratique suivante : le calcul approche de l'erreur relative est fait avec une erreur qui ne dépasse pas le carré, de l'erreur relative empirée, et se trouve même généralement très loin de l'atteindre.

Par exemple, dans les cas que j'avais choisis, les erreurs relatives empirées valaient respectivement

$$\frac{26}{1000} + \frac{12}{1000} + \frac{10}{1000} \text{ soit } \frac{5}{100} \text{ et } \frac{6.5}{1000} + \frac{5.0}{1000} + \frac{9.5}{1000} \text{ soit } \frac{2}{100}$$

Elles avaient donc pour carrés : $\frac{2.5}{1000}$ et $\frac{0.4}{1000}$
alors qu'en fait les erreurs imputables à la méthode ne dépassaient pas, en valeur relative, respectivement

$\frac{0,3}{1000}$ et $\frac{0,007}{1000}$

De toute cette discussion la conclusion à tirer reste que, comme on devait intuitivement s'y attendre sans aucun doute, le calcul par la méthode des erreurs est d'autant plus précis que les erreurs utilisées sont plus faibles en valeurs relatives (1) Il est excellent en général si l'on peut se limiter à des variations de 1 % et reste le plus souvent très acceptable tant qu'elles ne dépassent pas 3 ou 4 %.

Il se pose donc immédiatement la question : faut-il avoir une chance spéciale pour trouver des données susceptibles d'être traitées par ce genre de calcul ? Car les nombres "ronds" propres au calcul très rapide ne sont pas en apparence, assez nombreux pour être utilisables à la place d'un nombre pris au hasard.

Eh, bien tout dépend de ce que l'on peut appeler un nombre "rond". Et en particulier, je crois que bien des gens, même cultivés, ont besoin d'enrichir leur collection de nombres "ronds" en se souvenant des valeurs décimales de fractions simples, et en se rappelant que le calcul des fractions est rapide lorsqu'il est bien fait. Chaque année, je suis obligé de faire apprendre à mes nouveaux élèves le tableau suivant des fractions simples, non réductibles en fractions décimales très simples :

1/3 = 0,333   2/3 = 0,666   4/3 = I,333

1/6 = 0,1666   5/6 = 0,8333

1/7 = 0,142857   2/7 = 0, 285714   3/7 = 0,428571   4/7 =0,571428
5/7 = 0,714285   6/7 = 0,857142

1/8 = 0,125   3/8 = 0,375   5/8 = 0,625   7/8 = 0,875

1/9 = 0,1111   2/9 = 0,222   etc...   8/9 = 0,888

[Il est à remarquer que la liste des fractions à dénominateur 7 se retient très facilement si l'on connait la lère, car la série des chiffres est toujours la même et s'obtient en doublant toujours le nombre 7, ce qui donne d'abord le groupe 14, puis 28, puis 57 au lieu de 56, à cause de la retenue qu'on aurait en doublant un nombre supérieur à 50.]

- -

(1) Et plus précisemment pas trop grandes devant la précision exigées finalement par le calcul.

Voici un exemple de calcul devenu alors rapidement possible : soit à effectuer $x = \dfrac{3,41 \times 23,85}{14,42}$

Je vois les voisinages : 3410 et 3333
1442 et 1428 1/2
2385 et 2400

Je pose donc,

$x = \dfrac{0,341 \times 2,385}{0,1442}$ et calcule d'abord $x_1 = \dfrac{1/3 \times 2,4}{4/7} = 0,8 \times 7 = 5,6$

Rectifions : nous avons sur 1/3 une erreur de δ

$\dfrac{0,0077}{1/3}$ soit $23/1000$ (à majorer); sur 2,4 $\dfrac{0,015}{2,4}$ soit $\dfrac{6}{1000}$ (à diminuer) et sur 4/7 $0,00135/4/7$ soit $\dfrac{10}{1000}$ (à enlever également). Il faut donc (au total) ajouter 0,007 soit $\dfrac{1}{140}$ environ, ce qui nous donne $5,6 + \dfrac{5,6}{14} = 5,64$

Un calcul ordinaire bien long et bien inutile donne :

$$\frac{0,341 \times 2,385}{0,1442} = 5,63998$$

résultat qui se passe de commentaires !

Du reste pour qu'on se rende compte de la souplesse de la méthode, je montre encore, sur le même exemple, combient elle donne des résultats présentables même au cours et utilisation maladroite. Supposons en effet qu'au lieu d'avoir vu les voisinages effectivement proches que j'ai utilisés plus haut, on ait seulement constaté les voisinages de 3,41 avec 3,5 et de 14,42 avec 14. On eut alors calculé : $x_2 = \dfrac{3,5 \times 24}{14} = \dfrac{7 \times 12}{14} = 6,0$ et les corrections à faire, trop grandes en principe, eussent été

$-0,09/3,5 = -0,18/7$ soit $-26/1000$
$-0,015/24$ soit $-6/1000$
$-0,42/14$ soit $-30/1000$

ou au total $-62/1000$, ce qui sur 6 donne une correction de $-0,372$ et l'on botient $x = 6 - 0,372 = 5,628$, résultat dont l'inexactitude n'est que de 12/5000 soit moins de 1/400, et qui par conséquent, bien que très maladroitement trouvé, eût été acceptable avec les données indiquées, en le limitant aux trois chiffres significatifs 5,63

b) bis - METHODE DES SIMPLIFICATIONS PROPORTIONNELLES - Je signale enfin, pour terminer, un aspect un peu particulier de la méthode précédente, d'un emploi aussi rigoureux que l'on désire dans le cas assez fréquent, où les calculs se réduisent à une seule division : au lieu de faire les rectifications proportionnelles après un premier calcul, on les effectue directement, en prenant par directives de rendre le dénominateur de la fraction simple, et de modifier en conséquence le numérateur, sans s'inquiéter du tout de savoir, s'il devient simple ou non.

Par exemple soit à calculer $\frac{1248}{981}$

Pour rendre le dénominateur simple, il faut visiblement l'augmenter jusqu'à 1000, c'est à dire l'augmenter de 19. P R O P O R T I O N N E L L E M E N T , l e numérateur doit être augmenté d'environ (et un peu plus) 19 x 1¼ soit de 24, ce qui fait 1272/1000 ou 1,272 - Le calcul direct donne
(1,2714) 1,2714, et c'est du reste ce que l'on aurait trouvé si l'on avait calculé avec plus de soin la majoration estimée 24.

De même, cherchons la valeur de la fraction inverse $\frac{981}{1248}$ -
Cette fois c'est 1248 que nous arrondissons à 1250 en majorant de 2 en bas, donc de 2 x 4/5 ou 1,6 en haut, ce qui donne

$$\frac{982,6}{1250} = \frac{0,09826}{0,125} = 0,09826 \times 8$$

(Opération qui se fait immédiatement et donne 0,78608)

La division ordinaire de 981 par 1248 donne 0,78606....

En fait, je conseille vivement au lecteur de faire les divisions pour lui faire sentir de façon très persuasive l'avantage des méthodes que j'appelle simplificatrices....

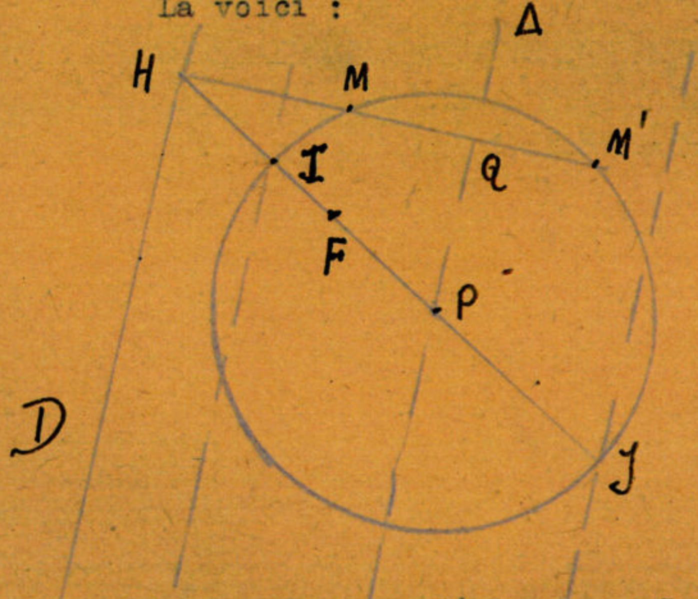
G E O M E T R I E

-:-:-:-:-:-

Je me borne ici à présenter une démonstration géométrique originale et très simple du théofême suivant, fondamental dans l'étude des Courbes du second degré : étant donnés un point fixe F et une droite D , le lieu des points de leur plan dont le rapport des distances au point F et à la droite D à une valeur donnée K est un conique (Ellipse, parabole ou hyperbole suivant que K est inférieur, égal ou supérieur à 1) dont l'excentricité est K et qui admet F comme foyer et la perpendiculaire de F sur D comme axe local.

Ordinairement on donne de ce théôfême une démonstration analytique qui ne peut être faite qu'après l'étude de l'équation réduite de l'éllipse ou de l'hyperbole, méthode peu satisfaisante à un double titre comme étant très indirecte et non géométrique. Parfois les cours de géométrie proposent des considérations géométriques, mais ils n'obtiennent le résultat désiré qu'après la démonstration d'une série de deux ou souvent trois propositions successives, ou bien après une démonstration extrêmement longue où l'enchaînement du raisonnement paraît très artificiel et presque impossible à retenir pour un élève ordinaire.

Ma démonstration ne me parait pas présenter ces défauts.
La voici :



Soit M un point du lieu et H sa pro~~ssi~~jection SUR D. On a donc MF::MH= K CHERCHONS S'IL EXISTE UN SECOND POINT DU LIEU M', SUR LA DROITE MH

On aurait encore M'F:M'H= K, dont M' et M appartiennent au lieu des points dont le rapport des distances à F et H est égal à K, c.a.d. au cercle de diamètre IJ si I et J sont les deux points qui partagent FH dans le rapport K. Soient P et Q les milieux de IJ et de M'M

Lorsque H se déplace sur D, I et J, donc P aussi, décrivent des parallèles à D, et PQ étant perpendiculaire à MM' dont parallèle à D, reste sur la droite Δ lieu de P.

On a donc soit HM + HM' = 2 HQ = constante (cas de la figure)
M'-HM|=2HQ soit |HM'- HM| = 2 HQ = constante, suivant que M et M' sont du même côté de H ou de part et d'autre, c'est-à-dire suivant que I et J sont ou non du même côté de H, ou enfin suivant que

K<1 [illegible] K>1